

DM : Promenade chez les formes modulaires

Analyse complexe 2025-2026, Thomas Serafini
tserafini@dma.ens.fr

Le but de ce DM est d'introduire la notion de forme modulaire et d'étudier les propriétés algébriques de ces objets.

Un anneau A est dit gradué s'il existe une décomposition $A = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_n$ telle que $A_n A_m \subseteq A_{n+m}$. Un idéal $I \subseteq A$ d'un anneau gradué est dit gradué si $I = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} (I \cap A_n)$. On définit $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, que l'on fait agir par homographies sur le demi-plan de Poincaré, noté $\mathbb{H}$. Quand on considère $\gamma \in \Gamma$, on sous-entendra toujours $\gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

Le DM est long, et il est tout à fait envisageable de ne pas le faire dans son entièreté, auquel cas on pourra admettre des résultats de questions précédentes non faites.

1 Formes et fonctions modulaires et leurs séries de Fourier.

Soit $k \geq 0$ un entier. Une forme modulaire de poids k sur $\mathbb{H}$ est une fonction holomorphe f sur $\mathbb{H}$ vérifiant les conditions suivantes :

(i) $\forall \gamma \in \Gamma, f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^k f(\tau)$.

(ii) $f(\tau)$ est bornée quand $\Im(\tau) \rightarrow \infty$.

On note $\mathcal{M}_k(\Gamma)$ le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des formes modulaires de poids k . Si de plus $f(z) \rightarrow 0$ quand $\Im(z) \rightarrow \infty$, on dit que f est cuspidale et on note $\mathcal{S}_k(\Gamma)$ le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des formes cuspidales de poids k . Finalement, on pose

$$\mathcal{M}(\Gamma) = \bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{M}_k(\Gamma).$$

$$\mathcal{S}(\Gamma) = \bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{S}_k(\Gamma).$$

1. Démontrer qu'une forme modulaire de poids k impair est nulle.
2. Démontrer que $\mathcal{M}(\Gamma)$ est une $\mathbb{C}$ -algèbre graduée, et que $\mathcal{S}(\Gamma)$ est un idéal gradué de $\mathcal{M}(\Gamma)$.
3. Soit f une fonction méromorphe sur $\mathbb{H}$ vérifiant $f(\tau+1) = f(\tau)$ pour tout $\tau \in \mathbb{H}$. Démontrer qu'il existe une fonction méromorphe $\hat{f}(q)$ sur $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ telle que $f(\tau) = \hat{f}(e^{2i\pi\tau})$.
Indication : on pourra montrer l'existence d'une fonction $\hat{f}$ vérifiant $\hat{f}(e^{2i\pi\tau}) = f(\tau)$, puis démontrer sa méromorphie en considérant des déterminations locales du logarithme.
On dira qu'une fonction méromorphe sur $\mathbb{H}$ est une fonction modulaire de poids k si elle vérifie, pour tout $\gamma \in \Gamma$, l'équation $f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^k f(\tau)$ et si elle est méromorphe à l'infini, c'est-à-dire si $\hat{f}$ est fonction méromorphe sur $\mathbb{D}$ (donc si elle a un pôle en 0).

4. Démontrer que la série

$$G_k(\tau) = \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \frac{1}{(m\tau+n)^k}$$

converge pour $k > 2$ et définit bien une forme modulaire. On pourra utiliser l'exercice 12 du TD 5.

On définit $g_2(\tau) = 60G_4(\tau)$, $g_3(\tau) = 140G_6(\tau)$.

5. Démontrer que si f est une forme modulaire de poids multiple de 4 mais pas de 6, alors $f(\omega) = 0$. Similairement, si f est de poids multiple de 6 mais pas de 4, alors $f(i) = 0$. En particulier, on a $E_4(\omega) = E_6(i) = 0$.
6. Démontrer que $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$ est une forme modulaire cuspidale non-nulle de poids 12.

2 L'action de Γ sur $\mathbb{H}$

7. Définissons H comme l'ouvert du demi-plan $\mathbb{H}$ défini par $|\Re(\tau)| < 1/2, |\tau| > 1$. Notre but dans cette question est de démontrer que H est un domaine fondamental pour l'action de Γ sur $\mathbb{H}$, c'est-à-dire que pour tout $\tau \in \mathbb{H}$ il existe $\gamma \in \Gamma$ tels que $\gamma\tau \in H$, et de plus si $\tau \neq \tau' \in H$ alors $\gamma\tau \neq \tau'$ pour tout $\gamma \in \Gamma$.
- (a) En faisant agir répétitivement $\tau \mapsto \tau \pm 1$ et $\tau \mapsto -1/\tau$, démontrer la première partie de l'assertion.
- (b) Démontrer que pour $\Im(\tau) \leq \Im(\tau')$, si $\gamma\tau = \tau'$ alors $|c\tau + d| \leq 1$.
- (c) Démontrer précisément que si $\tau \in \overline{H}$ et $\gamma\tau \in \overline{H}$ alors soit $\tau = \omega$, soit $\tau \neq \omega$ et on est dans l'une des situations suivantes :

$$\begin{cases} |\Re(\tau)| = \frac{1}{2}, \gamma = \pm \begin{bmatrix} 1 & \pm 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ |\tau| = 1, \gamma = \pm \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{cases}.$$

8. Soit $\gamma \in \Gamma$. Démontrer que si γ a un point fixe τ , alors $\Im(\tau) = \frac{\sqrt{3}}{2m}$ ou $\Im(\tau) = \frac{1}{m}$ avec m entier.
9. En déduire que les seuls $\tau \in \overline{H}$ avec des stabilisateurs sont $i, \omega, \omega + 1$, puis que si $\tau \in \mathbb{H}$ a un stabilisateur non trivial, il est égal modulo Γ à i ou ω . Calculer les stabilisateurs de ω et i .

3 La formule de valence

Notons $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ le quotient (ensembliste) de $\mathbb{H}$ par l'action du groupe modulaire Γ . Le but de cette partie est de prouver que si f est une fonction modulaire de poids k , alors

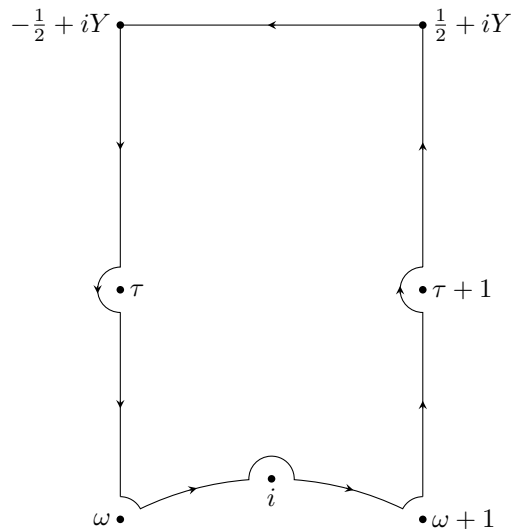
$$\sum_{P \in \Gamma \backslash \mathbb{H}} \frac{\text{ord}_P(f)}{n_P} + \text{ord}_\infty(f) = \frac{k}{12}$$

où $n_P = 2$ si $P = \Gamma i$, $n_P = 3$ si $P = \Gamma \omega$ et $n_P = 1$ sinon. Fixons une fonction modulaire f de poids k .

10. Démontrer que pour $\tau \in \mathbb{H}$, l'ordre (du zéro ou du pôle) de f en τ est égal à l'ordre de f en $\gamma\tau$. En déduire que $\text{ord}_P(f)$ est bien défini pour $P \in \Gamma \backslash \mathbb{H}$.

On considère le contour C obtenu en parcourant le bord de H dans le sens direct, modifié comme suit :

- On joint le bord droit au bord gauche par un segment horizontal entre $-1/2 + iY$ et $1/2 + iY$, où Y est choisi de sorte à ce que tout zéro ou pôle de f soit de partie imaginaire $< Y$,
- On évite i, ω et $\omega + 1$ avec des portions de cercle de rayon ε ,
- Si $\tau \in \partial H \setminus \{\omega, \omega + 1, i\}$ est un pôle ou un zéro de f , on l'inclut dans l'intérieur du contour grâce à un demi-cercle de rayon ε si τ est sur la partie gauche du bord et on l'exclut si τ est sur la partie droite du bord.



Pour ne pas encombrer le dessin, appelons γ^- le bord horizontal gauche, γ^+ le bord horizontal droit, σ^- le douzième de cercle en bas à gauche, σ^+ le douzième de cercle en bas à droite, et finalement $\alpha_{\infty,Y}$ le segment en haut, $\alpha_{\omega,\varepsilon}^\pm$ les deux portions de cercle autour de ω et $\omega + 1$ et $\alpha_{i,\varepsilon}$ le demi-cercle au-dessus de i .

11. Vérifier que pour chaque zéro ou pôle de f différent de i, ω, ∞ , le contour englobe exactement un seul représentant modulo Γ (attention : il pourrait y avoir des pôles évités par $\sigma^\pm$).
12. En déduire que

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{\substack{P \in \Gamma \backslash \mathbb{H} \\ P \neq i, \omega}} \text{ord}_P(f)$$

13. Evaluer l'intégrale sur $\alpha_{\infty,Y}$ quand $Y \rightarrow \infty$. Même question pour $\alpha_{\omega,\varepsilon}^\pm$ et $\alpha_{i,\varepsilon}$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.
14. Démontrer que

$$\int_{\sigma^-} \frac{f'}{f} d\tau = - \int_{\sigma^+} \frac{f'}{f} d\tau - \int_{\sigma^+} \frac{k}{\tau} d\tau.$$

15. En déduire la formule de valence.

4 Structure de l'algèbre $\mathcal{M}(\Gamma)$

16. Démontrer à l'aide de la formule de valence que

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}_k(\Gamma)) \leq \begin{cases} \lfloor \frac{k}{12} \rfloor + 1, & k \not\equiv 2 \pmod{12} \\ \lfloor \frac{k}{12} \rfloor, & k \equiv 2 \pmod{12} \end{cases}.$$

17. Démontrer que la borne est atteinte pour $k < 12$.
18. (a) Démontrer que si $Q(X, Y) \in \mathbb{C}[X, Y]$ vérifie $Q(G_4^3, G_6^2) = 0$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $G_4^3 = \lambda G_6^2$. On pourra considérer la décomposition de Q en parties composantes homogènes et utiliser la graduation sur $\mathcal{M}(\Gamma)$.
(b) En déduire que G_4 et G_6 sont algébriquement indépendants, c'est-à-dire que si $P(X, Y)$ est tel que $P(G_4, G_6) = 0$ alors $P = 0$.
19. Soit A l'algèbre graduée $\mathbb{C}[X, Y]$ où S est de degré 4 et T est de degré 6. Démontrer que $S \mapsto G_4, T \mapsto G_6$ donne un isomorphisme d'algèbres graduées $A \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(\Gamma)$.
20. Démontrer que $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{S}_k(\Gamma)) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}_k(\Gamma)) - 1$.
21. Démontrer à l'aide de la formule de valence que Δ ne s'annule pas sur $\mathbb{H}$. En déduire que $\dim(\mathcal{M}_k(\Gamma)) = \dim(\mathcal{S}_{k+12}(\Gamma))$.
22. Déduire finalement que la borne sur $\dim(\mathcal{M}_k(\Gamma))$ est atteinte.

5 Corps des fonctions modulaires

Dans cette dernière section, on démontre que le corps des fonctions modulaires est engendré par une seule fonction : le j -invariant. On définit

$$j(\tau) = \frac{g_2(\tau)^3}{\Delta(\tau)}.$$

23. Démontrer que j est une fonction modulaire de poids 0 qui est holomorphe sur $\mathbb{H}$. Vérifier que j a un pôle d'ordre 1 à l'infini et un zéro d'ordre 3 en ω .
24. Démontrer à l'aide de la formule de valence que j est injective sur $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ dans le sens où elle vérifie que si $j(\tau) = j(\tau')$ alors $\tau = \gamma\tau'$ pour un certain $\gamma \in \Gamma$. Démontrer également que j est surjective sur $\mathbb{C}$. En l'occurrence, cela signifie que le quotient $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ existe en tant que variété complexe, et est isomorphe à $\mathbb{C}$.

25. Soit f une fonction modulaire. Démontrer que si f a un zéro ou un pôle en i (resp ω), alors ce zéro ou pôle est d'ordre multiple de 2 (resp. multiple de 3).
26. Soit f une fonction modulaire de poids 0 sans pôle dans $\mathbb{H}$. Démontrer que f est un polynôme en j , de degré son ordre à l'infini.
27. Démontrer que le corps des fonctions modulaires de poids 0 est $\mathbb{C}(j)$.